ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Тема: *Системы логарифмических и показательных уравнений и неравенств.*

I. Актуализация теоретического материала.

При решении систем показательных и логарифмических уравнений и неравенств применяются те же способы и приемы, что и при решении систем алгебраических уравнений и неравенств. Следует лишь подчеркнуть, что во многих случаях, прежде чем применить тот или иной метод решения систем, следует преобразовать каждое уравнение системы к возможно более простому виду.

Пример 1. Решим систему уравнений: $\begin{cases} 25^{2x}+25^{2y}=30, \\ 25^{x+y}=5\sqrt{5} \end{cases}$.

Решение. Положив $u=25^x$, $v=25^y$, получим систему уравнений $\begin{cases} u^2+v^2=30, \\ uv=5\sqrt{5} \end{cases}$, имеющую четыре решения: $\begin{cases} u_1=5, \\ v_1=\sqrt{5}; \end{cases} \begin{cases} u_2=\sqrt{5}, \\ v_2=5; \end{cases} \begin{cases} u_3=-5, \\ v_3=-\sqrt{5} \end{cases}; \begin{cases} u_4=-\sqrt{5}, \\ v_4=-5. \end{cases}$

Но $u=25^x$, $v=25^y$, значит $u>0$, $v>0$, т.е. из найденных четырех решений надо взять только первые два.

Таким образом, задача сводится к решению следующей совокупности систем уравнений: $\begin{cases} 25^x=5, \\ 25^y=\sqrt{5}; \end{cases} \begin{cases} 25^x=\sqrt{5}, \\ 25^y=5. \end{cases}$ Из первой системы находим $x_1=\frac{1}{2},\ y_1=\frac{1}{4},$ из второй: $x_2=\frac{1}{4},\ y_2=\frac{1}{2}.$ Итак, система имеет два решения: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right).$

Пример 2. Решим систему уравнений: $\begin{cases} x^{\log_y x}\cdot y=x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1. \end{cases}$ (1)

Решение. Приведем первое уравнение системы (1) к более простому виду. Для этого возьмем от обеих частей уравнения логарифм по основанию y: $\log_y\left(x^{\log_y x}\cdot y\right)=\log_y x^{\frac{5}{2}}$, и далее $\log_y x^{\log_y x}+\log_y y=\frac{5}{2}\log_y x$, $\log_y^2 x+1=\frac{5}{2}\log_y x.$ Положив $u=\log_y x$, получим квадратное относительно u уравнение $u^2-\frac{5}{2}u+1=0$, корни которого $u_1=2,\ u_2=\frac{1}{2}.$ Значит, либо $\log_y x=2$, тогда $x=y^2$, либо $\log_y x=\frac{1}{2}$, тогда $x=\sqrt{y}$, т.е. $y=x^2$.

Итак, следствием первого уравнения системы (1) является совокупность уравнений: $x=y^2;\ y=x^2$.

Приведем теперь второе уравнение системы (1) к более простому виду. Для этого перейдем от логарифма по основанию y к логарифму по основанию 4: $\log_4 y\cdot\frac{\log_4(y-3x)}{\log_4 y}=1,$ и далее $\log_4(y-3x)=1$, откуда $y-3x=4$. Таким образом, решение системы (1) мы свели к следующей совокупности систем уравнений:

$$\begin{cases} x = y^2, \\ y - 3x = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2, \\ y - 3x = 4. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений, вторая система имеет два решения: (4;16) и

(-1;-1).

Проверка. Решение системы (1) должны удовлетворять следующим условиям: $\begin{cases} x \succ 0, \\ y \succ 0, \\ y - 3x \succ 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$ Пара (4;16) этой системе удовлетворяет, а пара (-1;1) – нет. Значит, (4;16) – единственное решение системы.

II. Закрепление теоретического материала.

Решить системы уравнений:

$$а)\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36}, \\ xy - x + y = 118; \end{cases} \quad б)\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5; \end{cases} \quad в)\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12, \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2}; \end{cases} \quad г)\begin{cases} x^{y+1} = 27, \\ x^{2y-5} = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$д)\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg 2, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases} \quad е)\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}; \end{cases} \quad ж)\begin{cases} \log_{0.5}(y - x) + \log_2 \frac{1}{y} = -2, \\ x^2 + y^2 == 25. \end{cases}$$

Решить системы неравенств:

$$а)\begin{cases} 9^x - 10 \bullet 3^x + 9 < 0, \\ \frac{2}{x} < 2 + \frac{3}{x-1}. \end{cases} \quad б)\begin{cases} 3^{x+2} + 9^{x+1} - 810 > 0, \\ \log_3{}^2 x + 4\log_3 x + 3 \geq 0; \end{cases} \quad в)\begin{cases} \log_2{}^2 x + \log_2 x - 2 \leq 0, \\ 4^x - 3 \bullet 2^x < 4. \end{cases}$$

III. Домашнее задание.

Решить системы уравнений:

$$а)\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases} \quad б)\begin{cases} x^{2y^2 - 9y + 9} = 8, \\ x^{y^2 - 5y + 6} = 4. \end{cases} x \succ 0 \quad в)\begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 648, \\ 3^x \cdot 4^y = 432. \end{cases} \quad г)\begin{cases} x^{y^2 - 5y + 6} = 4, \\ x^{2y^2 - 9y + 9} = 64. \end{cases}$$

Решить системы неравенств:

$$а)\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} \succ \frac{27}{64}, \\ 2^{x^2 - 6x - 3,5} \prec 8\sqrt{2}. \end{cases} \quad б)\begin{cases} \frac{x^2 + 4}{x^2 - 16x + 64} \succ 0, \\ \lg\sqrt{x + 7} \succ \lg(x - 5) - 2\lg 2. \end{cases}$$

Литература:

1. Виленкин Н.Я., Кочева А.А., Стеллецкий И.В. Задачник-практикум по элементарной математике. - М.: Просвещение, 1969.
2. Завало С.Т. Элементарная алгебра. - М.: Просвещение, 1964.
3. Сборник конкурсных задач для поступающих во втузы. Под ред. М.И.Сканави. - М.: Высшая школа, 1977.